Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι (χρησιμοποιώντας επαγωγή):

$$1+x+x^2+\dots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \quad \text{όταν } x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$$
και $n\in\mathbb{N}^*$

2. Χρησιμοποιώντας επαγωγή, δείξτε ότι

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2, \quad \text{για κάθε } n=1,2,\dots$$

3. Παρόμοια δ.ο:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

4. Δείξτε την άσκηση 3, αφού δείξετε με επαγωγή ότι ισχύουν οι τύποι

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2} \quad (\mathrm{I}) \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\mathrm{II})$$

Δηλαδή αποδείξτε τους τύπους (I) και (II), και χρησιμοποιήστε τους κατάλληλα για την απόδειξη της άσκησης 3.

5. Βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν) των παρακάτω ακολουθιών

α). $\alpha_n=\dfrac{3n}{7n+\sqrt{n}}, \quad n=1,2,\dots$

β) $b_n=\dfrac{3+(-1)^n}{n}$

γ) $\gamma_n=\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$

δ) $\delta_n=\dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$

ε) $\varepsilon_n = \dfrac{7^n + 2^n}{4 \cdot 7^n + 3^n}$.

6. Βρείτε το όριο της ακολουθίας με τύπο

$$a_n = \sqrt[n]{x^n + x^{-n}}, \text{ όταν } x \in \mathbb{R},\ x > 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

7. Δίνεται η ακολουθία x_n, για την οποία ισχύει:

$\frac{1}{2} < x_n < 5n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Να υπολογιστεί το όριο $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$

8. Δίνεται η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με αναδρομικό τύπο

$x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$.

a) Δείξτε με επαγωγή ότι η $(x_n)_n$ είναι αύξουσα

b) Δ.ο είναι άνω φραγμένη

c) Βρείτε το όριο της.

9. Δίνεται η ακολουθία $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $y_1 = \sqrt{5}$ και

$y_{n+1} = \sqrt{5 y_n}$, $\forall n = 1, 2, \dots$ Δείξτε με επαγωγή ότι είναι αύξουσα

και άνω φραγμένη. Συμπεράνετε ότι συγκλίνει, και υπολογίστε το όριο της.

10. Δίνεται η $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $y_1 = 10$, $y_{n+1} = \sqrt{5 y_n}$. Μελετήστε την

ως προς την σύγκλιση.

11. Εξετάστε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ συγκλίνει απόλυτα.

Συγκλίνει απλά?

12. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, που

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n!\,(n+2)}$

b) $a_n = \dfrac{1}{n\,2^n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n}{4^n}$, d) $a_n = \dfrac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}}$

e) $a_n = \dfrac{n^2}{e^n}$ f) $a_n = \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ g) $a_n = \dfrac{3^n+4^n}{4^n+5^n}$.

13. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όπου:

i) $a_n = e^{-n^2}$, ii) $a_n = (-1)^n \dfrac{n+2}{2n+1}$, iii) $a_n = \cos(1/n)$

14. Μελετήστε ως προς την απλή και την απόλυτη σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\dfrac{1}{n}$

15. Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n^9+2n^8}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{5n^2+4}$$

Μελετήστε την 2η ως προς την απόλυτη σύγκλιση επίσης.

16. Μελετήστε ως προς την απλή και απόλυτη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3\sin(n)+\cos(3n)}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{9^n}{n^2 \cdot n!}$$

17. Δείξτε ότι το όριο $\lim\limits_{x\to -\infty} \cos\left(1+\sqrt{|x|}\right)$ δεν υπάρχει

18. Το ίδιο για το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

19. Δείξτε ότι $$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{2x-1} = -\infty$$

20. Βρείτε το όριο $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sin^7(x)}{7x+\sqrt{x}}$$

21. Υπολογίστε τα όρια (αν υπάρχουν):

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$. Τι πρέπει να ισχύει για τα a, b ώστε να υπάρχει το όριο;

ii) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x^2)\cdot \sin(4x)}{10x^3}$$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, όπου $f(x)=\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

22. Βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{2-2\cos x}, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{4x^3+5x^2+2x+1}{2x^2-4x+1} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}.$$